Matemáticas en las aulas de Secundaria

Sección a cargo de

Inmaculada Fuentes Gil

¿Se pueden introducir los cardinales transfinitos en Secundaria? La importancia de la Historia

por

Eduardo Dorrego López

Resumen. En este artículo se defiende la necesidad y viabilidad de la introducción en las aulas de Secundaria de la noción de infinito, ya no en relación al concepto de límite, sino desde un punto de vista aritmético, esto es, como número transfinito. Transversalmente, de manera inevitable, se tratan temas históricos, aunque no pretende ser un artículo de Historia.

Se expresan algunas reflexiones personales, junto con resultados derivados de la experiencia con mis alumnos en diferentes centros y que de alguna forma las sustentan. Los diálogos aquí contenidos, aunque adornados, se basan en las conversaciones entre profesor y alumno, y en su esencia son tan literales como la memoria me permite, pues este estudio se hizo y se hace en forma de discusión abierta en clase, sin cuestionarios escritos.

1. Introducción

Pocos conceptos hay tan atractivos y al alcance de todos como el de infinito. Esta unión es clave. Con un simple vistazo al firmamento en una noche clara se nos dispara la imaginación. ¿Quién no ha intentado contar las estrellas y, en un momento de reflexión, se ha preguntado acerca de lo grande que podría ser el universo y la cantidad de cosas que podría llegar a albergar? Solo hace falta un poco de imaginación, y de eso a nuestros alumnos no les falta.

En el concepto de infinito, los profesores de Secundaria tenemos un arma muy potente. Este despierta en el alumno una cantidad de preguntas enorme y con respuestas desconcertantes, la mayoría de ellas tumbando su propia visión y opinión sobre el tema, y que, además, pueden llegar a entender con un poco de ayuda. De hecho, esas contradicciones internas que experimentan al intentar encontrar respuestas nos pueden servir para que entiendan los problemas por los que pasa un concepto hasta que se establece (ellos que lo ven como todo dado, como nuestras cifras o nuestra forma de multiplicar, dividir, etc.) y para que sean partícipes de la Historia, sintiendo exactamente las mismas frustraciones que los protagonistas en su momento. La Historia es una herramienta enormemente útil para nuestras clases, sobre todo como defensa ante los archiconocidos ataques de nuestros alumnos (y público en general) sobre la inutilidad de nuestra disciplina, pues muestra que las razones que motivaron el desarrollo de estas ideas fueron puramente prácticas.

¿Pero qué puede tener de práctico el infinito? Es evidente que nadie va a poner en su vida infinitos ladrillos, ni va a ir a una frutería a que le den infinitas naranjas. Pero es necesario. Lo es, en tanto en cuanto el hombre ha sentido siempre la necesidad de expresarse, ya fuera por medio de la Música, la Pintura, o cualquier arte en general, como las Matemáticas; la necesidad de reflexionar acerca de determinadas cosas que lo han inquietado intelectualmente. Estos han sido y son ingredientes fundamentales para el desarrollo de las diferentes ramas del conocimiento y, por lo tanto, deben ser conocidas y estar presentes en una etapa tan importante para el alumno como es la Educación Secundaria. Por supuesto que es necesario.

De todos modos, quizá no haría falta apelar a razones tan poco «utilitarias». Que en el mundo físico no hay nada infinito está por ver. Por ejemplo, Alan Guth, padre de la inflación cósmica (véase [3]), defiende que el universo podría ser infinito, no solo en el sentido de que se expandiría por siempre (infinito en potencia), sino que es posible que sea actualmente infinito[1].

Siendo además el infinito un concepto tan largamente (desde la antigua Grecia, y antes con la cultura veda) y ampliamente (filósofos, teólogos, matemáticos, físicos, personas de todo tipo) discutido, y habiendo sido tan revolucionarias las respuestas a las que se llegaron, sería una lástima que los alumnos saliesen del instituto sin una idea más o menos clara sobre esto, más allá del tratamiento que se le da en el contexto del análisis con los límites.

¿Qué es el infinito? Si los números sirven para medir conjuntos, ¿hay números para medir conjuntos como $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$? ¿Puede entonces contarse el infinito? Eligiendo un buen momento a lo largo del curso, es posible y necesario introducir $\aleph_0$ y $\aleph_1$.

2. ¿Cuándo es el momento?

Mirando el currículum de la asignatura (pensemos, por ejemplo, en un curso de 3.º de ESO) y haciendo cálculos para intentar cuadrarlo en los nueve meses de curso, la respuesta parece obvia: nunca. Entramos entonces en un terreno pantanoso acerca de lo que se debe dar y lo que no. Algunos inamoviblemente se ceñirían a esos 15

[1]En relación a esto, es realmente interesante y no muy conocido el caso del jainismo. La concepción cosmológica de esta antigua religión hindú (siglo VI a.C.) asume, a grandes rasgos, que el universo es eterno e increado. Infinito en el tiempo y en el espacio. Asume también que cualquier acto (bueno o malo) tiene un efecto que ata o lastra al ser que lo comete (teoría del Karma). El objetivo último de un jainista es librarse de esa atadura y así poder conseguir la liberación. Pues bien, la necesidad de manejar distancias en un universo de tamaño infinito y calcular el tiempo de atadura provocado por un acto cometido en un universo eterno, les llevó a manejar números astronómicamente grandes (del orden de 10^{196}) y a desarrollar una clasificación de los números que incluso sobrepasaba lo finito ([5], [6]).

temas. Otros, seguramente, reestructurarían parte de estos dando más importancia a unas cosas y menos a otras.

Lo que está claro es que ese temario ha de ser pensado como algo flexible. Una suerte de guía para el profesor, más que unos grilletes que no le den libertad de movimiento. Puede ser interesante, en un tema de Álgebra, hablar un poco sobre el periplo que han tenido que pasar algunos símbolos hasta ser ampliamente aceptados, particularizando por ejemplo en algunos de los más conocidos ($\times$, $+$, $=$, $\sqrt{\ }$, etc.). Sería más que conveniente introducir los números complejos desde un punto de vista histórico haciendo énfasis en el contexto en el que se desarrollaron (véase [2]), pues de otro modo es imposible entenderlos; se pueden manejar muy bien, pero no entenderlos. Seguramente para dar cabida a esto tendríamos que dedicar menos tiempo a profundizar en otras cuestiones pero, ¿diríais que aprenderían menos?

> «Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas.» (E. T. Bell, 1985)

En el caso del infinito, por lo que he intentado explicar antes, me parece crucial encontrar un hueco.

Aunque seguro que se puede hacer de muchas maneras y en momentos y cursos diferentes, mi hueco lo encontré en 3.º de ESO en el contexto de las sucesiones, tanto en la introducción del tema como en esos días que quedan colgando entre los exámenes finales y las ansiadas vacaciones.

3. El origen del conflicto. Cómo explicar lo inexplicable

> «Un conjunto de números es una sucesión si es infinito y lo puedo numerar.»

Dentro de esta definición, que es el principio del tema, se esconden dos cuestiones que pasan desapercibidas y que, en cambio, abarcan toda esta historia.

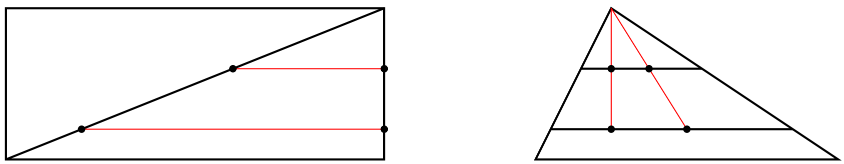
La primera —¿qué es un conjunto infinito?— no está exenta de confusión. La mayoría de los alumnos asocian el infinito a algo que no termina nunca, a aquello fuera de lo cual siempre hay algo (infinito en potencia), apoyados por su intuición de los números naturales. Pero, al mismo tiempo, esto conduce a que no pocos de ellos concluyan que, si uno siempre puede determinar números más grandes que cualquier otro que se elija, es porque esos números ya estaban ahí; todos ellos (infinito en acto). Análogamente, a la hora de pensar en los números, digamos, entre 0 y 1 (o en los puntos de un intervalo), afirman su infinitud basándose en el hecho de que entre dos números siempre se puede encontrar otro (o entre dos puntos siempre se puede determinar su punto medio) lo cual, concluyen, es un indicador de que ese segmento está formado ya por infinitos puntos (en acto). Es decir, no parece que tengan clara la distinción entre el infinito en acto y el infinito en potencia, lo que por otro lado no me sorprende en absoluto, ya que ciertamente estas son cuestiones muy delicadas y sutiles[2].

[2]De todos modos, como creo que es obvio, no se pretende hacer una discusión en profundidad, sino tan solo despertar la curiosidad del alumno y potenciar su capacidad de reflexión.

Es de recibo ahondar un poco en la Historia y explicarles por qué y en qué contexto se hizo necesario hacer esta distinción, con las paradojas de Zenón, teniendo en cuenta además que usando la suma de infinitos términos, que se explica en este mismo tema, se puede dar solución a alguna de ellas, y que además va a ser tema omnipresente hasta la solución del problema en el siglo XIX.

La segunda cuestión en la definición que hay que aclarar es: «y los puedo numerar». ¿Por qué es necesario este añadido? ¿Es que hay infinitos de diferente naturaleza como para que alguno no se pueda numerar? ¿Qué quiere decir esto, y en qué sentido podrían ser diferentes dos infinitos? Esto, creo yo, es lo más conflictivo y contradictorio para ellos, y lo más interesante y revelador para nosotros, pues muestran exactamente las mismas dudas y les lleva a los mismos quebraderos de cabeza que sufrieron aquellos que, a lo largo de la historia, se enfrentaron a este problema. De la mano de personas como Tabit ibn-Qurra, Roger Bacon, Guillermo de Occam, Galileo, Leibniz y Bolzano, entre otros, es decir, usando la Historia como recurso (imprescindible), se encontrarán cara a cara con temas que desesperaron a muchos, y experimentarán la frustración a la hora de intentar conciliar lo que entienden con lo que están dispuestos a aceptar.

Veamos, por ejemplo, estas figuras:



¿Qué opinión les merece que podamos establecer una correspondencia biunívoca entre el lado de un rectángulo y su diagonal (figura izquierda), o, en general (figura derecha), entre dos segmentos de diferente longitud? En un lenguaje más cercano: si esas líneas están formadas por infinitos puntos (en acto), ¿qué significa que cada punto de una de ellas tenga un gemelo en la otra? Porque eso es lo que ocurre y ellos no dudan de este hecho. Dudan de lo que esto parece insinuar, que es que las dos líneas tienen la misma cantidad de puntos:

> SKEPTIKÓS: Pero esto no es posible. Está clarísimo que la diagonal de ese rectángulo es más grande que el lado.
>
> ANANTA: Sin duda. Es «más grande». De hecho si aplicáramos el teorema de Pitágoras, es la respuesta que obtendríamos y los números no mienten. La diagonal tiene mayor longitud.
>
> SKEPTIKÓS: Exacto.
>
> ANANTA: ¿Entonces afirmas que la diagonal es más grande que el lado?, ¿que contiene más puntos?
>
> SKEPTIKÓS: Claro; sí es mayor[3].

[3]En estas discusiones se ve con claridad cómo mayoritariamente se confunde longitud con cardinalidad.

Ananta: Pero, ¿cuántos puntos hay en el lado?

Skeptikós: Infinitos.

Ananta: ¿Y en la diagonal?

Skeptikós: Infinitos.

Ananta: Y si es más grande la diagonal que el lado, qué es lo que estás diciendo...

Skeptikós: Que... un infinito es más grande que otro.

Ananta: ¿Y es eso posible?

Entran entonces en una espiral de contradicciones de la que no es fácil salir: «si cada punto de una línea tiene un gemelo en la otra» —estarán diciéndose para sí— «es que tienen los mismos puntos, pero esto no es así, una es claramente más grande; sin embargo, de ocurrir esto habría diferentes infinitos, y eso sí es completamente absurdo». Realmente están en un verdadero atolladero.

Skeptikós: A ver, déjame pensar. Es cierto que uno es claramente más grande, pero no tiene sentido que haya diferentes infinitos. El infinito quiere decir que algo no se acaba nunca y no hay diferentes grados de «no acabarse nunca».

Otros, en cambio, sí admiten que pueda haber diferente infinitos, pero por la simple razón de que no aceptan bajo ningún concepto que esas dos líneas sean iguales. La intuición es tan fuerte (el ver que una línea es «más grande» que la otra) que si hay que concluir que hay diferentes infinitos, pues habrá que hacerlo (este es un paso valiente[4], solo que está apoyado en una premisa falsa). La Matemática es eso: pensar, frustrarse y encontrar soluciones, y este concepto se presta inmejorablemente a ello.

Pero cambiemos de terreno. Dejemos por un momento la Geometría y ya que estamos con sucesiones volvamos al campo numérico:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, \dots$$

Aunque apenas estemos entrando en materia, a nadie le resultaría complicado adivinar el patrón mediante el cual se forma este «pequeño» grupo de números naturales. Efectivamente, son los cuadrados perfectos: el primero es $1^2 = 1$, el segundo es $2^2 = 4$, el tercero es $3^2 = 9$, en general, el n-ésimo será n^2. Todos se generan a partir de esta expresión, que llamamos con razón *término general.*

[4]De hecho, pasos como estos son los que llevan al establecimiento de nuevos conceptos (y ellos los están dando). Piénsese en el caso ya comentado de los números complejos: al manipular con las reglas aritméticas establecidas «objetos» que no existían, se llegaba a soluciones conocidas de antemano para algunas ecuaciones de grado tres vía la fórmula de Del Ferro-Tartaglia, lo que, junto con otras cuestiones (su operatividad, su interpretación geométrica), da impulso a su futura consideración como números.

Nadie ve nada, nadie opone resistencia, pero bien a la vista, solo que sin llamar la atención, aparece de nuevo el mismo problema que antes:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longleftrightarrow & 1 \\ 2 & \longleftrightarrow & 4 \\ 3 & \longleftrightarrow & 9 \\ 4 & \longleftrightarrow & 16 \\ \vdots & & \vdots \\ n & \longleftrightarrow & n^2 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

ANANTA: Una pregunta fácil: ¿cuántos números naturales hay?

SKEPTIKÓS: Infinitos.

ANANTA: Y de entre todos ellos, si solo cojo los que he rodeado, ¿tendré más o menos?

La mayoría de ellos responden que hay menos, aunque siempre hay alguna discrepancia:

SKEPTIKÓS: Ambos son infinitos, con lo que... diría que hay los mismos.

Valiente respuesta, solo que a la inversa que la anterior: «infinito solo hay uno», razonan, «con lo que necesariamente esos conjuntos han de tener los mismos elementos aunque en absoluto lo parezca y, en parte, vaya contra mi intuición»[5]. De todos modos, como la anterior, se basa en una premisa falsa.

Lo mismo ocurre en otros casos:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 10, \quad \ldots$$

En el caso de los números pares e impares, una respuesta habitual es que hay la mitad[6]. Además, los números pares están contenidos en los naturales, lo que parece dar pleno sentido a que haya menos. Pero, claro, si volvemos a usar la herramienta de

[5] En el contexto geométrico con el caso de las dos líneas de diferente longitud, apenas obtuve por parte de ellos una respuesta como esta debido, creo, a que es mucho más difícil afirmar que una línea que es clara y manifiestamente de mayor longitud que la otra contiene la misma cantidad de puntos. Los números naturales y los cuadrados no los vemos acabados, pero las líneas sí; están delante de nosotros, perfectamente delimitadas.

[6] Clara demostración de que lo que hacen es comparar conjuntos finitos que aumentan ilimitadamente y que se hacen tan grande como se quiera, pero finitos. No piensan en los naturales como una totalidad acabada (la idea que sale a relucir de nuevo es la del infinito potencial).

la correspondencia, obtenemos la misma respuesta contradictoria: hay los mismos,

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longleftrightarrow & 2 \\ 2 & \longleftrightarrow & 4 \\ 3 & \longleftrightarrow & 6 \\ 4 & \longleftrightarrow & 8 \\ \vdots & & \vdots \\ n & \longleftrightarrow & 2n \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

En este momento en el que sus mentes están cubiertas por una niebla de dudas, es necesario volver a la Historia y ver qué respuestas se dieron a estas cuestiones. Hay para todos los gustos.

Por ejemplo, y conectando con el caso de los números pares e impares, son muy interesantes e ilustrativas las reflexiones de **Tabit ibn-Qurra** (826–901). Él acepta el infinito actual y la existencia de diferentes infinitos, pero «el todo es mayor que cualquiera de sus partes» sigue siendo un axioma inquebrantable. De hecho, esto es lo que le lleva a aceptar diferentes tamaños de infinito. Casi como podría hacerlo alguno de mis alumnos, afirma que los pares y los impares por separado son la mitad de los naturales. Lo curioso es que lo mismo que usó para igualar los pares con los impares, la equipotencia, no lo usó para igualar cualquiera de estos con los naturales, pues llegaría a un absurdo ya que están incluidos en $\mathbb{N}$ y «el todo es. . . ».

Roger Bacon (1214–1294), en su obra *Opus Maius*, se plantea el dilema del lado y la diagonal de un cuadrado (yo usé un rectángulo para que fuese incluso más visual) y lo resuelve rechazando que esas líneas estén formadas por infinitos puntos, es decir, no acepta el infinito en acto pues lleva a contradicciones: una línea mide más que la otra y, en cambio, contiene los mismos puntos: imposible.

Entretanto, un comentario de **Guillermo de Occam** (1280–1349) en sus *Questiones in quator libros sententiarum* nos puede servir como pista de qué es lo que se está haciendo mal y cuál debería ser el enfoque:

> *No es incompatible que la parte sea igual o no sea menor que el todo; esto es lo que ocurre siempre que una parte del todo sea infinita [. . .] Así, el principio de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes es válido solo para cosas compuestas de partes enteras finitas.* [1]

También **Galileo** (1564–1642) acepta el infinito actual. Las líneas, así como los objetos concretos que se encuentran en la naturaleza, están formadas por un infinito actual de partes pequeñas. Él presenta en cambio un problema que a su juicio es insoluble, y que se refiere a la biyectabilidad de dos segmentos de longitudes diferentes y al caso ya comentado de los cuadrados perfectos (lo que se conoce como la paradoja de Galileo). Su solución es afirmar la imposibilidad de establecer comparaciones entre conjuntos infinitos, es decir, de tratar al infinito como si fuera un número que mide conjuntos y que está expuesto a las relaciones mayor, menor o igual, pues esto lleva a contradicciones.

El caso de **Leibniz** (1646–1716), quien al principio aceptó sin reservas el infinito actual, es un claro ejemplo de las dificultades enormes que entraña esta idea. Después de su etapa parisina en la que lee a Galileo y sus reflexiones sobre el tema, rechaza de plano el infinito actual y la posibilidad de los números infinitos, pues esto contradice el axioma de Euclides ([4]).

Por último, y a las puertas de la solución del problema, se encuentra **Bolzano** (1781–1848). Él también acepta el infinito actual e incluso la existencia de diferentes infinitos, solo que impulsado por una premisa falsa: dos intervalos de longitud diferente han de tener diferente cantidad de puntos, de ahí que haya diferentes infinitos. En cambio, él estableció una biyección entre $[0, 5]$ y $[0, 12]$. De nuevo el axioma euclidiano muestra su fuerza.

Un pequeño recorrido por la Historia como este les muestra a los alumnos que sus dudas y preguntas son, en realidad, las normales. No es que su ignorancia les lleve a plantearse cuestiones sin sentido. Todo lo contrario, esas cuestiones son las correctas. También esto permite ver más claramente cuál es el origen del conflicto: intentar conciliar la biyectabilidad de dos conjuntos con el hecho de que uno esté o no incluido en el otro. En todos los casos este es el problema que está presente y que lleva a la contradicción.

¿Qué se está haciendo mal? Para darse cuenta de esto, lo único que tienen que hacer es fijarse mucho en algo que tienen muy interiorizado y que hacen todos los días: contar.

4. La solución al problema

Cuando uno se enfrenta a una idea nueva, de manera inevitable usa como referencia lo que ya conoce para poder comprenderla. Esto les está pasando a ellos. Todos los problemas que se les han puesto delante se refieren a conjuntos infinitos (de puntos o números). ¿Qué tienen como referencia? Los conjuntos finitos. Esto hace que proyecten sobre los primeros las propiedades que se cumplen para los segundos, lo que lleva a las contradicciones. El problema es, por tanto, el enfoque: **lo infinito niega a lo finito. Siendo entonces conceptos diametralmente opuestos, cabe esperar que las leyes que los gobiernen sean distintas** (es que lo raro sería lo contrario). Esto es lo primero que tienen que tener claro. Si quieren entender este nuevo concepto, tienen que abrir su mente y librarse de los prejuicios y las ataduras finitistas. Teniendo entonces esto presente atacamos el núcleo del problema.

Todo esto tiene que ver con decidir cuándo una colección de cosas es mayor, menor o igual en tamaño que otra. Si encima de la mesa tengo 351 caramelos, cada uno de los cuales tiene un número escrito en su envoltorio, y meto en una bolsa los correspondientes a los números pares, en esa bolsa hay menos caramelos que en la mesa. Aunque no los cuente sé que hay menos, pues forman parte del total. De todos modos, si los contase o los comparase con ese total, como en el caso de los puntos del lado y la diagonal del rectángulo, obtendría la misma respuesta:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{MESA} & & \text{BOLSA} \\
1 & \longleftrightarrow & 2 \\
2 & \longleftrightarrow & 4 \\
\vdots & & \vdots \\
175 & \longleftrightarrow & 350 \\
\vdots & & \\
351 & & \\
 & & \\
\multicolumn{3}{c}{\text{Hay solo 175}}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\text{MESA} & & \text{BOLSA} \\
1 & \longleftrightarrow & 2 \\
2 & \longleftrightarrow & 4 \\
\vdots & & \vdots \\
175 & \longleftrightarrow & 350 \\
\vdots & & \vdots \\
351 & \longleftrightarrow & 702 \\
\vdots & & \vdots \\
\multicolumn{3}{c}{\text{Hay los mismos}}
\end{array}
$$

Esto se puede extrapolar a cualquier cantidad finita. El cambio surge si hubiese, no ya 351, sino tantos caramelos como números naturales, en cuyo caso esa asignación «número natural ↔ número par» no acabaría nunca. Por tanto, siendo conscientes siempre de que estamos tratando con conceptos opuestos, se puede entender que esta rareza, lejos de ser una contradicción, es una propiedad diferenciadora: en el terreno de lo infinito, un conjunto puede estar dentro de otro y tener el mismo tamaño:

Ananta: ¿Recuerdas la observación de Guillermo de Occam?

Skeptikós: Sí, pero… no pueden tener el mismo tamaño. ¿No ves que está incluido en él? Es parte de él.

Ananta: De acuerdo, pero lo que mide el tamaño no es la inclusión, sino la asignación uno a uno, o lo que técnicamente llamamos biyectabilidad. Lo que pasa es que en el caso finito estas dos herramientas te llevan a lo mismo.

Skeptikós: ¿Y por qué debo quedarme con la asignación para decidir sobre el tamaño y no con la inclusión?

Ananta: Pues porque es la manera natural de contar; es, de hecho, la forma en la que se ha contado desde el principio. Biyectar es contar.

Ciertamente, como muestran los registros más antiguos de formas de conteo (el hueso de Ishango, el hueso de Lebombo, o la tibia de lobo encontrada en la antigua Checoslovaquia), la manera más primitiva de contar ha sido la biyectabilidad. Tantas marcas en un hueso como cosas pretendo contar, me aseguran la igualdad en tamaño de los dos conjuntos:

Ananta: ¿Qué pasa?, ¿nunca has contado con los dedos?

Skeptikós: Claro.

Ananta: Pues estás biyectando. No es que quieras contar dedos; es que los estás usando, como las marcas en un hueso, para contar otras cosas. Un amigo por cada dedo te asegura no solo que tienes mucha suerte, sino que tienes tantos amigos como dedos: 20. Has contado.

Skeptikós: Tiene sentido, aunque es un poco rebuscado.

Ananta: En realidad, no, solo que lo haces tan a menudo que te pasa desapercibido.

Se pueden, entonces, contar conjuntos infinitos, y de la misma forma en la que contamos los finitos: por medio de las biyecciones. Sin duda, esto refuerza aún más en ellos la idea de que **la elección correcta es la biyectabilidad**. No es que sea una herramienta difícil de comprender; además, salta a la vista cuáles son sus implicaciones. El problema es que dichas implicaciones chocan frontalmente con una intuición que está apoyada en la relación de inclusión y en las cantidades finitas, donde estas dos maneras de actuar llevan a las mismas conclusiones.

Una vez que tienen más o menos claro cuál es la herramienta a utilizar, solo queda hacer uso de ella para examinar la relación entre los tamaños de nuestros conjuntos típicos.

5. El infinito sí es un número

En base a la discusión anterior, alguno de los conjuntos típicos con los que trabajan diariamente no ofrecen demasiados problemas, al menos para los alumnos que siguen pensando que solo un infinito es posible, no tanto para los que aún están aferrados al postulado de Euclides. La naturaleza discreta de los pares, impares, cuadrados perfectos, etc., hace relativamente sencillo que acepten la igualdad de los tamaños. Incluso el conjunto de los números enteros, de los que tienen una visión geométrica extendiéndose en ambos sentidos que parece no ofrecer posibilidad de elegir un primero, un segundo, un tercero, etc., es fácilmente manejable si se les recuerda que el orden de elección no necesariamente ha de ser por tamaño; el caso es ordenarlos pero pueden hacerlo como quieran. La piedra en el camino la ponen los racionales.

Ananta: ¿Qué dirías, a bote pronto, de las fracciones?, ¿hay más o menos que naturales?

Skeptikós: ¿No era que entre dos naturales hay infinitas fracciones o algo así?

Ananta: Sí, algo así.

Skeptikós: Pues blanco y en botella.

Ananta: ¿Y si fuera capaz de conectar cada fracción con un número natural como hice en el caso de los naturales?, ¿qué dirías entonces?

Skeptikós: Es que no puedes.

A pesar de la aparente superioridad de los racionales frente a los naturales, algunos siguen tan unidos a la idea de un único infinito que se resisten; ellos, aunque con la premisa equivocada, escogen la opción correcta. Otros, en este caso engañados, terminan errando al cambiarse al bando de los defensores del postulado euclidiano.

Ananta: Bueno, eso ya se verá. Las cosas hay que demostrarlas y, una vez hecho, aceptar con alivio o con incredulidad las consecuencias.

Después de presentarles a los racionales debidamente colocados en filas y columnas, surge relativamente rápido la opción de numerarlos en una especie de zigzag, pues queda bastante claro que horizontal y verticalmente no se consigue nada. Incluso alguno se anima a ofrecer su propia numeración serpenteante:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \cdots \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & & \\
\frac{4}{1} & \leftarrow & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \cdots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & & \\
\frac{5}{1} & \rightarrow & \frac{5}{2} & \rightarrow & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \frac{5}{6} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Skeptikós: ¿Pero quién se aburría tanto como para pensar en estas cosas?

Ananta: Pues, como vimos antes, mucha gente. Pero solo uno, Cantor, con la importantísima e inestimable ayuda de su confidente Dedekind, fue capaz de domar a este gigante.

Además, fíjate en lo que pasa. De igual forma que un conjunto de 2 libros, 2 lápices, 2 coches, tienen en común el tamaño, siendo el 2 una especie de etiqueta que los representa a todos y que llamamos número, lo mismo ocurre con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, los pares (**P**) y los impares (**I**). Ellos también tienen en común el tamaño, así que, en pro de la igualdad, a estos conjuntos, y a todos los que compartan esa misma propiedad, se les asocia una etiqueta numérica que no es otra cosa que la portavoz de ese tamaño: $\aleph_0$.

Skeptikós: Entonces…

Ananta: Exacto. Gracias a Cantor hoy puedes decir sin miedo que el infinito sí es un número.

En este punto, se puede y se debe jugar un poco con $\aleph_0$, porque inmediatamente reclaman que se haga operaciones con ellos.

Skeptikós: Muy bien, pero, si es un número, se podrán hacer sumas, restas, multiplicaciones, etc., con los demás, ¿no?

Sin meterse en camisas de once varas, se puede mostrar sin dificultad cómo se comporta este extraño número con la suma. Tienen bastante claro que si a los números negativos se les añade un número positivo, por ejemplo el 10, el tamaño no aumenta, es decir: $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ por ser concretos. Y por otro lado, como ya vieron antes, si a los números positivos se les añade los negativos se obtienen los enteros, que tampoco aumentan en tamaño: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Sin duda, estas cosas son muy chocantes y extrañas para ellos pero, como se ve, el tecnicismo que hay detrás no es en absoluto elaborado. De todos modos, de nuevo es interesante enfatizar que están en el reino de lo infinito, con lo que cabría esperar que las cosas fuesen tan distintas como $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ y $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Pero si los que seguían defendiendo que el infinito es único, que no es posible ir más allá de aquello que ya no tiene límite, se sentían aliviados por estos resultados, para otros sin duda contradictorios, se verán como mínimo sorprendidos con el último caso.

La demostración de la no numerabilidad del intervalo unidad, que lleva a la presentación de un nuevo infinito $\aleph_1$, requiere principalmente del método de reducción al absurdo para entender su idea general, que es lo que se pretende. La idea no es realizar demostraciones rigurosas, sino dar ideas generales pero claras sobre un tema que, sin lugar a dudas, requiere profundas reflexiones. El mismo método de reducción al absurdo[7] precisa de un importante esfuerzo por parte del alumnado para su comprensión, pero es una herramienta tan potente y utilizada en Matemáticas —ellos mismos, muy probablemente, tendrán que enfrentarse a ella en la Universidad— que merece la pena pelearse un poco con ella[8].

Bien es cierto que otra opción, llegado a este punto, podría ser simplemente comentar, sin entrar en demostraciones, que se puede probar la no numerabilidad de dicho intervalo, pero es muy probable que después de varios días intentando convencerles de la existencia de varios infinitos, tumbando una tras otra sus convicciones más férreas sobre el tema y cuestionando lo más intuitivo, no acepten que nos salgamos por la tangente y pasemos de puntillas sobre esto. Si optamos por dar unas pinceladas de la demostración

$$\begin{array}{ccl}
1 & \longleftrightarrow & 0.\xcancel{-} - - - \cdots \\
2 & \longleftrightarrow & 0. - \xcancel{-} - - \cdots \\
3 & \longleftrightarrow & 0. - - \xcancel{-} - \cdots \\
\vdots & & \qquad \vdots
\end{array}$$

fuera de lo que es el propio método de reducción al absurdo, los detalles técnicos necesarios para entender la idea general son casi inexistentes. Otra cosa, repito, es asimilarla.

ANANTA: Por lo tanto, no queda más remedio que aceptar las consecuencias. Existen diferentes tamaños de infinitos de los que ya conoces dos: $\aleph_0$ y $\aleph_1$.

SKEPTIKÓS: Cómo que de los que ya conozco dos. ¿Hay más?

ANANTA: Eso ya es otro tema.

[7] Agradezco al profesor José Ferreirós sus valiosas observaciones sobre este tema en particular y sobre el artículo en general, así como los comentarios y esfuerzos de los revisores por darle a este escrito la mejor apariencia.

[8] Por ejemplo, demostrándoles que el producto de un racional distinto de cero y un irracional siempre es irracional.

6. Conclusión

Durante toda la discusión, los alumnos se han movido en torno al siguiente esquema:

A_1: El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

A_2: Solo hay un infinito.

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad 10,\quad \dots$$

- $\mathbf{P} < \mathbb{N}$: No son capaces de renunciar a A_1, aunque eso les lleve a aceptar que A_2 es falso.
- $\mathbf{P} = \mathbb{N}$: No son capaces de renunciar a A_2, aunque eso les lleve a aceptar que A_1 es falso.

Esquema que, según demuestra la historia, ha sido el mismo en torno al que se han movido algunas de las mentes más capaces. ¿Cuál de las dos opciones es más difícil de aceptar? Supongo que dependerá de quien se enfrente al problema, pero sin duda ambas dinamitan algunas de las ideas más intuitivas e interiorizadas.

¿Es posible entonces introducir de manera general la noción de número cardinal transfinito? Creo que sí. Al menos, si algo lo impide no son los detalles técnicos involucrados en el proceso: la herramienta de la biyectabilidad y el método de reducción al absurdo, un método que si bien resulta confuso y complicado a los no iniciados, creo que puede llegar a ser accesible con el apoyo de ejemplos sencillos. Dependerá más bien del tiempo del que uno disponga, que parece que siempre es poco, y de la importancia que cada uno le dé al tema. Suele ser normal, de hecho se incluye en mayor o menor medida en los libros de texto, dedicar algo de tiempo al número áureo y su conexión con la naturaleza, el arte y la belleza en el contexto de los números irracionales o en el mismo tema de sucesiones con el ejemplo de la sucesión de Fibonacci, algo que dispara la curiosidad del alumnado.

Lo que yo defiendo es que, por un lado, el del infinito es un tema suficientemente importante como para dedicarle tiempo, no solo porque ha sido tema de discusión a lo largo de toda la historia, sino porque lo sigue siendo en muchos aspectos tanto de la matemática (cardinales grandes) como de la física (infinitud del universo, infinitud de universos), como de la filosofía (aceptación del infinito actual); y, por otro, que es viable hacerlo dado que en su base esta idea es suficientemente sencilla como para que cualquiera pueda discutir sobre ella, y enormemente atractiva como para que cualquiera quiera hacerlo.

Nota (Ananta y Skeptikós)

Son más que conocidas las reticencias y el escepticismo por parte de los griegos a la hora de tratar con el infinito, así como el hecho de que los hindúes tuvieron menos problemas para hacerlo, como es el caso de autores muy conocidos como Bhaskaracharya o Brahmagupta y otros no tanto como los jainistas Virasena y Nemicandra.

La palabra hindú *Ananta* significa literalmente infinito y la palabra griega *Skeptikós* significa escéptico. En los diálogos entre *Ananta* y *Skeptikós*, el profesor intenta convencer sobre temas relacionados con el infinito al escéptico alumno.

REFERENCIAS

[1] J. L. BELMONTE MARTÍNEZ, *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad*, Tesis doctoral, Universidad de Salamanca, 2009.

[2] F. M. CASALDERREY, *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*, Nivola, Madrid, 2000.

[3] P. ESTUPINYA, Apuntes científicos desde el MIT, *El País*, `http://blogs.elpais.com/apuntes-cientificos-mit/2010/07/el-universo-podría-ser-infinito.html`

[4] R. FAZIO, La crítica de Leibniz a los números infinitos y su repercusión en la metafísica de los cuerpos, *Theoria* **31** (2016), 159–175.

[5] L. C. JAIN, *The Tao of Jaina Sciences*, Arihant International, New Delhi, 1992.

[6] A. PÁNIKER, *El Jainismo. Historia, sociedad, filosofía y práctica*, 2.ª edición, Editorial Kairós, Barcelona, 2001.

EDUARDO DORREGO LÓPEZ, I.E.S. EUSEBIO DA GUARDA, A CORUÑA
Correo electrónico: `edorregolopez@gmail.com`