Índice general

Prefacio

El siglo XVIII es una época fascinante, entre otras cosas por lo diferente que era el panorama social e intelectual de aquello a lo que estamos acostumbrados. No existían las disciplinas científicas tal como las conocemos, ni siquiera había una frontera fuerte entre las 'ciencias' y las 'letras'; no había científicos, sino 'sabios' o 'eruditos' que se dedicaban tanto a la filosofía o las lenguas como a otros temas; las matemáticas incluían cuestiones de ciencia experimental o aún de ingeniería (astronomía, mecánica, fortificación, balística, etc.); y el lugar de las ciencias no era la universidad, sino las Academias, e incluso los salones de la alta burguesía y la nobleza. Muchos científicos no habían disfrutado de una educación formal, sino que eran autodidactos: tal es el caso de Lambert.

Esas enormes diferencias con respecto a nuestro especializado presente son clave para entender los trabajos que se recogen en este libro, cuidadosamente preparado por Eduardo Dorrego y Elías Fuentes Guillén. El autor, nacido en Alsacia[1] pero académico en Berlín, nos regala dos escritos enteramente diferentes: un concienzudo tratado matemático donde se demuestra la irracionalidad de π y de e (y sus potencias), además de conjeturarse —por vez primera en la historia— que son números transcendentes; y un escrito divulgativo para ilustración de aquellos que pudieran sentir la tentación de cuadrar el círculo. Los dos trabajos fue-

[1]Mulhouse era una ciudad asociada a la Confederación Helvética, una pequeña república calvinista, no parte de Francia.

ron preparados entre 1766 y 1767, pero uno se imprimió en 1768 en las Memorias de la Academia Real de Ciencias de Berlín, mientras el otro apareció en 1770 en el volumen II de un libro titulado *Contribuciones al Empleo de las Matemáticas y a sus Aplicaciones.* La intención divulgativa de este segundo escrito es obvia desde la primera página, y destaca su estilo irónico; Lambert se contentó aquí con dar argumentos heurísticos y esbozos de una posible demostración. La ciencia como avance de las fronteras del saber, y como ilustración del espíritu humano: dos aspectos fundamentales de la concepción abierta y profunda del siglo XVIII.

Johann Heinrich Lambert es conocido entre los matemáticos, sobre todo, por su trabajo sobre el número π, aunque se le suele considerar como una figura de segunda y se conoce muy poco su obra. En un artículo publicado hace 40 años, Gray y Tilling discutían la figura de Lambert, presentándolo como un personaje «poco conocido, y sin embargo interesante» del siglo XVIII, que en su opinión merecía una revisión de conjunto.[2] En su tiempo, sin embargo, fue tenido por figura de primerísimo nivel, influyendo mucho en personas de la talla de Gauss y Kant, y su obra fue admirada por la profundidad y la amplitud de su saber. Se rumoreaba que el mismísimo Euler podría haber abandonado la Academia de Berlín a causa de Lambert (aunque parece que no se debió a conflictos intelectuales sino a cuestiones de gestión). Sólo estos datos deberían bastar para despertar el interés.

Profundizo en dos de ellos. Gauss poseía muchas de las obras de Lambert, que seguramente estudió con cuidado en su juventud; los buenos conocimientos que tenía sobre los métodos cuantitativos de la física matemática y los métodos prácticos de cálculo[3] (algo que en su tiem-

[2]Ver [Gray et al. 1978].

[3]Se dice que las tablas de logaritmos de Lambert fueron una compañía constante para él, y de hecho tuvieron que ver con su temprano interés por la distribución de los números primos; este tipo de tablas constituían un instrumento de trabajo imprescindible en el día a día. Ver el trabajo 'Logarithmentafeln - Gauss' „tägliches

po tenía gran relevancia) se explican en gran medida por la influencia de Lambert. Además, es muy probable que las ideas de Lambert sobre geometría hiperbólica guiaran los pensamientos del joven Gauss.[4] En cuanto a Kant, ambos sostuvieron una correspondencia desde 1765, momento en que Kant le consideraba «el primer genio de Alemania», y sus ideas tuvieron tanta relevancia para el famoso filósofo que consideró seriamente poner a Lambert en la dedicatoria de la *Crítica de la Razón Pura*.[5]

La dificultad de valorar a Lambert, y la razón por la que fue olvidado en el siglo XIX, es justo que era profundamente un hombre de la Ilustración. No era un 'especialista', sino todo lo contrario: filósofo no menos que científico, contribuyó a todas las ciencias de su tiempo; durante su actividad en las Academias de Munich y de Berlín, realizó contribuciones a todas las diferentes «clases» que abarcaban. Se ha dicho que, en lo bueno y en lo malo, era un perfecto ejemplo del erudito del siglo XVIII, que escribe sobre Dios y el mundo, sobre todos los temas posibles: matemáticas, ciencia experimental, filosofía, lenguas e historia. Autodidacta, muy independiente o aún testarudo en su forma de pensar y decisiones científicas, fue además un convencido impulsor del alemán como idioma científico y filosófico; pero eso causó precisamente que sus ambiciosos trabajos fueran mal conocidos. Veremos cómo una justa valoración de sus obras más admiradas bien podría requerir una visión tan amplia como la que imperó entre los ilustrados.

Los lectores encontrarán extenso material biográfico en el cap. 1 de este libro, obra de Eduardo Dorrego, y podrán admirar y divertirse con las genialidades del sabio de Mulhouse. Su primera interacción con Federico

---

Arbeitsgeräth" de Karin Reich, p. 44 (en *„Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst". Carl Friedrich Gauss in Göttingen*, ed. por Elmar Mittler, Göttingen, Bibliothek, 2005).

[4]Ver [Abardia et al. 2012].

[5]Parece que, si abandonó esa idea, fue por la temprana muerte de Lambert en 1777, cuatro años antes de la primera edición de la *Crítica*.

II de Prusia no tiene desperdicio, como tampoco lo tienen las impresiones que tuvieron de él grandes personajes como Lagrange. Admitamos que el genial Lambert era un tipo raro, al que hoy nos apresuraríamos a considerar un Asperger, lo cual quizá podría ayudar a entender algunas de las peculiaridades del caso. En su trayectoria científica, fue un *Einzelgänger*, un lobo solitario: prefirió muy a menudo temas fuera del *mainstream*, pero aún así hizo muy importantes contribuciones. Como persona, Lambert era un librepensador, un ilustrado de tendencia deísta (algo habitual en las zonas de habla alemana) y un autor esencialmente independiente. Quien mejor lo ha descrito es John Heilbron en las frases que cita Eduardo Dorrego en pág. 1:

> Polímata autodidacta, tomó como su principal guía la aplicación de las matemáticas a la física e incluso a la metafísica [...] Habló como un igual con Leonhard Euler y Georg Brander, respectivamente el matemático y el constructor de instrumentos más destacado de Alemania. En una palabra, fue el perfecto físico matemático: los matemáticos lo consideraban un experimentalista con un 'extraño talento para aplicar cálculos a los experimentos;' los experimentalistas lo creían un matemático con una comprensión inusual del comportamiento de los instrumentos.

La sorpresa que pudieron sentir sus contemporáneos es muy comprensible, porque en el Siglo de las Luces casi no hubo verdaderos físicos matemáticos: era muy raro encontrar una combinación bien lograda de capacidades experimentales y habilidades matemáticas, al estilo de Galileo o de Newton (que fueron casos excepcionales: para que ello se generalizara hubo que esperar a las innovaciones del siglo XIX en la enseñanza universitaria). Y Lambert, no contento con esa proeza, añadía el ser todo un filósofo. «Todo ello, trabajando desde las cinco de la mañana hasta las doce de la noche, con un descanso de dos horas al mediodía.»

Por aclarar lo que acabamos de decir, vale la pena citar algunas de sus contribuciones propiamente científicas y resaltar cómo quedan fuera de los temas principales de su tiempo. Desarrolló los métodos fotométricos e introdujo la noción de 'albedo', formulando también la Ley del Coseno en Óptica (en lugar de publicar sobre electricidad); hizo un importante trabajo sobre los cometas en astronomía (pero nada en mecánica racional); diseñó un higrómetro, entre otras cosas, gracias a su magnífico conocimiento del diseño de instrumentos; contribuyó con un gran trabajo sobre la representación en mapas, cartografía, que incluye la proyección conforme de Lambert; y el lector sabrá de su anticipación de la geometría no euclidiana y su trabajo sobre π (pero no llegó a publicar avances fundamentales en cálculo infinitesimal).

Convendría hablar algo de la filosofía de Lambert, que impresionó a Kant justo en la época de su despertar del dogmatismo racionalista y su transición al criticismo. Pero la verdad es que, a mi entender, las ideas filosóficas de Lambert están mal valoradas y esperan todavía una interpretación justa. Se suele decir que fue un seguidor de la escuela leibniziano-wolffiana, pero este tipo de etiquetamientos nos ayudan muy poco a comprender, no ya los detalles, sino incluso los grandes rasgos de un pensamiento. El propio Lambert prefirió indicar que en su filosofía se encontraban elementos de Wolff y otros de Locke, pero ¿es posible realizar una síntesis coherente de empirismo y racionalismo?[6] Claro que hay formas, y de hecho alguna combinación de ese tipo parecía imprescindible a quienes trabajaban en filosofía con la vista puesta en los métodos científicos. Un ejemplo del enfoque de Lambert: cuando en su *Neues Organon* de 1764 estudia los «conceptos simples» que son la base de todo, su análisis no parte de ideas *a priori* como esperaríamos de un racionalista, sino que tiene una base fenomenológica:[7] la experiencia da el

[6]El gran ilustrado Wolff, cuyo impacto sobre el mundo filosófico y matemático de habla alemana resultó enorme (piénsese que la terminología filosófica y matemática fue acuñada por él, en gran medida), tampoco fue un simple epígono de Leibniz.

[7]La «Fenomenología» es de hecho una de las cuatro secciones del «Nuevo Or-

punto de partida, y es por análisis del contenido de nuestra experiencia que se llega a los conceptos básicos. Lambert estaba convencido de que tal contenido no es cognoscible al margen de lo empírico, pero a la vez tiene la forma que tiene debido a elementos *a priori* que impone el entendimiento; no es de extrañar que Kant sintiera una gran afinidad con sus ideas. Así, puestos a simplificar, y mirando el asunto desde la perspectiva científica, podríamos decir que la teoría del conocimiento de Lambert permitía una lograda combinación de newtonianismo y leibnizianismo.

En cuanto a las matemáticas, fueron muchas las aportaciones de importancia del pensador alsaciano: series infinitas, fracciones continuas, un trabajo de geometría que prefigura a Monge, las funciones trigonométricas hiperbólicas, aplicaciones conformes, etc. etc. Consideremos por ejemplo el contenido de las *Contribuciones al Empleo de las Matemáticas y a sus Aplicaciones* (3 vols.): el Vol. I (1765) trata temas de geometría práctica y trigonometría, así como una interesante contribución a la teoría de los errores (análisis sistemático de la confiabilidad de las observaciones y los resultados experimentales); el Vol. II (1770) lleva contribuciones al álgebra y análisis, incluyendo la pieza sobre π, pero también estudios de gnomónica y las tablas lunares de Mayer;[8] el Vol. III (1772) discute problemas cartográficos, órbitas de los cometas, arquitectura, tasas de mortalidad... Se puede pensar, desde luego, que no fue un matemático de rango mundial como sus colegas Euler o Lagrange; eso resulta claro. En realidad, es interesante pensar en Lambert como

ganon»; dicha palabra, que tendrá luego enorme impacto, fue acuñada por Lambert. Esas cuatro secciones eran la «Dianoiología» o doctrina de las leyes generales del pensamiento (donde su enfoque lógico está cerca de los leibnizianos), la «Alethiología» o doctrina de la verdad, donde como hemos dicho desconfía de los sistemas categoriales trazados *a priori* y elige un enfoque empírico-analítico; la «Semiótica» o teoría de los signos (otro término acuñado por él y con gran futuro), y la «Fenomenología» o doctrina de las apariencias.

[8]Por cierto, se sabe que Gauss leyó el vol. II de *Beyträge* en 1795, y lo compró en 1800 (Gauss-Bibliothek, nº 53).

un matemático aplicado y físico matemático, más que un matemático puro.

Pero sería un error concluir que no se interesó también por cuestiones 'puras': de hecho, en temas lógicos y de fundamentos es donde sus aportaciones son más originales y miran hacia el futuro, por decirlo así.

Aquí nos interesa sobre todo la concepción de Lambert sobre los fundamentos de la teoría del número y de la geometría, lo que podría llamarse la metafísica del número y la del espacio. Es indicativo que su gran admirador Johann III Bernoulli (editor de sus escritos y secretario de la Acad. Real de Berlín) considerara que todos sus trabajos podían clasificarse como pertenecientes o bien al ámbito físico-matemático, o bien a la lógica.[9] Lo admiraba como un filósofo con extraordinaria disposición para el pensamiento lógico, «el mayor lógico» de su siglo, y así sigue siendo considerado aún hoy.[10] ¿Cómo entender lo que dice Bernoulli sabiendo que su trabajo incluye una gran cantidad de labor experimental? No hay incompatibilidad, sólo debemos recordar que la rúbrica 'matemáticas', en aquellos tiempos, incluía sin problemas a todas las 'ciencias' matematizadas (la fotometría, la cartografía, la arquitectura, etc.). Nuestra idea purista de las matemáticas es hija del siglo XIX, otra vez, y se aleja de la concepción ilustrada.

El sistema de Lógica de Lambert fue importante en su momento. Sin conocer gran cosa de los intentos de Leibniz, sólo basándose en la idea general de un álgebra del pensar, Lambert desarrolló cálculos muy comparables a los de Leibniz, logrando un sistema lógico elegante y eficiente. Los signos '=' y '+' se empleaban a la manera de Leibniz y de Boole,

[9] Introducción de Bernoulli a J. H. Lambert, *Logische und philosophische Abhandlungen*, vol. 1 (Berlin, 1782), pág. x.

[10] En la *Britannica* online puede leerse: «The greatest 18th-century logician was undoubtedly Johann Heinrich Lambert.» Ver `https://www.britannica.com/topic/history-of-logic/The-18th-and-19th-centuries` (artículo obra de Hintikka y Spade, consultado el 18/08/2020).

siendo + una unión de conceptos disjuntos o excluyentes; ahora bien, no era un cálculo de tipo extensional como el de Boole, sino intensional (los términos denotan conceptos, no cosas ni clases de individuos).[11] Para expresar que «Todo A es B», Lambert escribe '$a = mb$', esto es, el concepto conocido a es idéntico a la conjunción de b y un concepto indeterminado m (idea muy similar a la de Boole); en su sistema, distinguía cuidadosamente entre los conceptos conocidos, los indeterminados y los que son estrictamente desconocidos. Más interesante aún, prestó atención a las relaciones (ejemplo: 'es el padre de') y a cómo afectaría su consideración en lógica; introdujo un modo de expresar nociones relacionales mediante funciones: '$i = \alpha :: c$' indica que i es el resultado de aplicar una función unaria α al concepto c. Sería muy interesante saber si autores como Frege o Dedekind habían leído a Lambert, ya que la introducción de relaciones y la incorporación a la lógica de la idea matemática de función fueron la clave de las innovaciones de finales del siglo XIX.[12]

Pero lo cierto es que el sistema de cálculo lógico de Lambert, pese a sus logros y a pesar de haber influido en Moritz W. Drobisch (y, por su mediación, quizá en Boole), no fue decisivo en los siguientes progresos de la lógica matemática. Me permito sugerir que el mejor resultado de la extensa ocupación de Lambert con la Lógica fue el impacto que tuvo en algunas de sus contribuciones a los fundamentos de las matemáticas: su visión de la geometría, axiomática y 'moderna', y el enfoque de su trabajo sobre π, inusualmente riguroso.

---

[11] *Sechs Versuche einer Zeichenkunst in der Vernunftlehre* (1777) «Seis intentos de un método simbólico para la teoría de la razón». Incluido en *Logische und philosophische Abhandlungen*, vol. 1 (Berlin, 1782).

[12] La lógica de Aristóteles tiene la grave limitación de trabajar sólo con predicados monádicos (por ejemplo, 'es mortal' o 'es un mamífero') y no puede gestionar la lógica de las relaciones. Las nociones de relación y función son innovaciones clave de los siglos XVIII al XX; ver por ejemplo el famoso libro de Ernst Cassirer, *Substance and Function* (1910).

Acerca del número π, baste enfatizar aquí algunos puntos clave, ya que el lector puede encontrar todo lujo de detalles en las traducciones y estudios que encontrará más adelante. Lo que más llama la atención son dos elementos: que Lambert concibiera una demostración lógicamente estricta de la irracionalidad de π, casi sin lagunas, en un tiempo que no se caracterizaba precisamente por la adhesión al rigor (60 años antes de Cauchy); y que diera el paso de introducir la distinción entre irracionales algebraicos y trascendentes, que marcará el futuro del tema, pero que tardó mucho en ser adoptada por otros matemáticos, con la excepción de Legendre (desde 1840, aproximadamente, la recogen Liouville, Dirichlet y otros). Hoy no nos damos cuenta de lo incompleta que era la noción que se tenía de los números reales en torno a 1800: se pensaba sólo en irracionales cuadráticos, números como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, o a lo sumo del tipo $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, pero Lambert dio un paso de gigante hacia una concepción correcta de la continuidad del sistema de los números reales. Fue un paso de gigante advertir que hay toda una categoría de números irracionales más allá de los algebraicos;[13] Lambert fue en esto todo un pionero. Y en cuanto al rigor de su demostración, hay buenos indicios de que tuvo influencia sobre autores clave, como pueden ser Gauss (piénsese en sus rigurosas demostraciones del teorema fundamental del álgebra, en 1799 y 1816) y Bolzano (en sus obras de 1816 y 1817, incluido el célebre trabajo sobre el teorema del valor intermedio).

En cuanto a la geometría, un gran experto como V. de Risi resalta que Lambert fue pionero en reintroducir la concepción axiomática estricta de la geometría, tras unos siglos XVII y XVIII en que se había hecho estándar la idea de que el edificio deductivo de la geometría se basa en *definiciones*, de las cuales se siguen las primeras verdades. (El círculo se definía por su génesis, como el resultado de girar un segmento en torno

[13] Se dice que un número es *algebraico* cuando es la raíz de un polinomio con coeficientes racionales, de cualquier grado (los números racionales se corresponden con las fracciones).

a su extremo que se mantiene fijo, hasta volver a la posición inicial; y de ahí se deducía 'inmediatamente' que todos los radios del círculo son iguales entre sí; también, por supuesto, se deduce inmediatamente lo que era el postulado de Euclides, que puede trazarse un círculo en torno a un punto cualquiera y con un radio igual a un segmento cualquiera.) En cambio, Lambert, en su famoso trabajo sobre la «Teoría de las Paralelas» (escrito en 1766, publicado por Bernoulli en 1786), insiste en los axiomas de la geometría, en que deben considerarse como postulados que determinan el contenido de dicha ciencia, e incluso introduce la idea de libre interpretación de las nociones básicas. Con esto se anticipa por ¡más de un siglo! a la idea que harán célebre Pasch y Hilbert; he aquí la cita clave, tomada del §. 11 de «Teoría de las Paralelas»:

> En la primera parte de esta cuestión [a saber, *si el axioma de las paralelas de Euclides puede ser derivado en sentido propio de los postulados y axiomas euclidianos*], se puede abstraer de todo lo que antes llamé la *representación de la cosa.* Y puesto que los *postulata* de Euclides y sus otros axiomas han sido expresados en palabras, se puede y se debe exigir que la demostración no apele nunca a la cosa misma, sino que sea desarrollada de modo puramente simbólico —en la medida en que ello sea posible—. A este respecto, los *postulados* de Euclides son por así decir como otras tantas ecuaciones algebraicas que uno tiene frente a sí y desde las que uno tiene que computar x, y, z, etc., sin volver a considerar la cosa misma. Mas como no son exactamente tales fórmulas, cabe conceder el dibujo de una figura como guía para la ejecución de la demostración.

Termino aquí, pues creo que ya hemos insistido bastante en el calibre del autor, un científico y pensador de primera, y el interés de sus trabajos. El lector encontrará una excelente traducción castellana de ambos, con detallados y esclarecedores estudios introductorios. Es la primera vez que, en cualquier lengua, se publican conjuntamente el trabajo divulgativo de *Beyträge* y el académico de las *Mémoires*; y creo que es una gran idea, permitiendo una doble aproximación a un tema matemático fundamental en todas las épocas. Por cierto, las confusiones entre ambas obras fueron frecuentes en el pasado, y han sido causa de algunas opiniones muy incorrectas sobre la naturaleza del trabajo matemático de Lambert. El lector de esta obra ya no podrá caer más en tales confusiones.

José Ferreirós